ÉPREUVE PRATIQUE
DE MATHÉMATIQUES

On désigne par H l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien $(,)$ et de la norme $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$.

I

Soit $F : H \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et convexe (c'est-à-dire $F((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)F(x) + tF(y)$ pour tout $x \in H$, tout $y \in H$ et tout $t \in [0,1]$).

On désigne par $f(x) = F'(x)$ la différentielle (ou gradient) de F au point x. Dans toute la suite H est identifié à son dual par l'isomorphisme canonique défini à l'aide du produit scalaire.

On considère ainsi que $f(x) \in H$.

On désigne par $A_x = F''(x)$ la différentielle seconde de F au point x. Grâce à l'identification précédente on considère que $A_x \in \mathcal{L}(H)$, espace des endomorphismes de H.

On suppose qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

(1) $\quad \forall\, x, y \in H \quad (f(x) - f(y), x - y) \leqslant k\|x - y\|^2$

et on se propose d'en déduire :

(2) $\quad \forall\, x, y \in H \quad (f(x) - f(y), x - y) \geqslant \frac{1}{k}\|f(x) - f(y)\|^2$.

I. 1° Utilisant la convexité de F montrer que l'on a :

$$\forall\, x, y \in H \qquad (A_x(y), y) \geqslant 0$$

I. 2° Appliquant (1) établir que

$$\forall\, x, y \in H \qquad (A_x(y), y) \leqslant k\|y\|^2$$

I. 3° En déduire que

$$\forall\, x, y, z \in H \qquad (A_x(y), z) \leqslant (A_x(y), y)^{\frac{1}{2}}(A_x(z), z)^{\frac{1}{2}}$$

et que

$$\forall\, x, y \in H \qquad (A_x(y), y) \geqslant \frac{1}{k}\|A_x(y)\|^2$$

I. 4° Prouver (2) (on pourra écrire

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 A_{tx+(1-t)y}\,(x-y)\,dt).$$

I. 5° On pose $g(x) = f(x) - \lambda x$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant k$; montrer que l'on a :

$$\forall\, x, y \in H \qquad \|g(x) - g(y)\| \leqslant \mu\|x - y\|$$

avec $\mu = \max\{\lambda, k - \lambda\}$ (on pourra développer $\|g(x) - g(y)\|^2$).

II

Soit $L \in \mathcal{L}(H)$ un endomorphisme vérifiant :

(3) $\quad \ker L = \ker L^*$

où L^* désigne l'adjoint de L.

II. 1° Montrer qu'il existe une constante $\alpha_0 > 0$ telle que

(4) $\quad \forall\, x \in H \quad (L(x), x) \geqslant -\frac{1}{\alpha_0}\|L(x)\|^2$

(on pourra établir et utiliser la décomposition de H en somme directe orthogonale $H = Im\, L \oplus \ker L$).

.../...

E.N.S. ULM & SEVRES 1977

×7×

II. 2° Réciproquement, prouver que (4) entraîne (3) [on pourra appliquer (4) à $x = y + tz$, $y \in \ker L$, $z \in H$, $t > 0$].

II. 3° On introduit :

$$\alpha = \mathrm{Sup}\ \{\ \alpha_0 > 0\ ;\ \forall\, x \in H\,,\ (L(x), x) \geqslant -\frac{1}{\alpha_0} \| L(x) \|^2 \}$$

et on suppose dans toute la suite que $\alpha < +\infty$; noter que l'on a :

$$(5) \qquad \forall\, x \in H \qquad (L(x), x) \geqslant -\frac{1}{\alpha} \| L(x) \|^2.$$

Montrer que pour tout $\lambda \in]0, \alpha[$ l'endomorphisme $L + \lambda I$ est bijectif (I désigne l'identité) et que

$$\forall\, x \in H \quad \| (L + \lambda I)^{-1}(x) \| \leqslant \nu \| x \|$$

avec $\nu = \mathrm{Max} \left\{ \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\alpha - \lambda} \right\}$.

II. 4° Prouver, dans le cas particulier où $L^* = L$, que $-\alpha$ est une valeur propre de L et préciser laquelle.

III

On suppose maintenant que f vérifie (1) et que L vérifie (5), k et α étant liés par la relation $k < \alpha$.

III. 1° Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, \alpha - k[$, $\varepsilon I + L + f$ est bijectif de H sur H. A cet effet on pourra établir que pour tout u fixé dans H l'équation :

$$(6) \qquad \varepsilon x + L(x) + f(x) = u$$

admet une solution unique en écrivant (6) sous la forme

$$x = (L + \lambda I)^{-1}(u - f(x) + (\lambda - \varepsilon) x)$$

où $\lambda \in]0, \alpha[$ sera choisi convenablement.

On considère l'application $x \longmapsto Tx = (L + \lambda I)^{-1}(u - f(x) + (\lambda - \varepsilon) x)$; quel est le choix optimal de λ pour que les itérés de T convergent le plus rapidement possible vers une solution de (6) ?

On définit les ensembles :

$$Y = \bigcup_{a,\, b \in H} (L(a) + f(b))\ ,\quad Z = \bigcup_{a \in H} (L(a) + f(a))$$

et on se propose de montrer que ces ensembles ont la même adhérence et le même intérieur.

III. 2° Soit $u = L(a) + f(b)$; pour tout $\varepsilon \in]0, \alpha - k[$ on désigne par x_ε la solution de (6). Appliquant (2) avec $x = x_\varepsilon$ et $y = b$, on établira que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \| x_\varepsilon \|$ reste borné quand $\varepsilon \to 0$.

En déduire que $Y = \bar{Z}$.

III. 3° Lorsque $u \in \mathrm{Int}\ Y$ (intérieur de Y) on prouvera que $\| x_\varepsilon \|$ reste borné quand $\varepsilon \to 0$ (pour $v \in H$ avec $\| v \| < r$, on pourra écrire $u + v = L(a_v) + f(b_v)$ et appliquer (2) en $x = x_\varepsilon$, $y = b_v$).

III. 4° En déduire que si $u \in \mathrm{Int}\ Y$, alors $u \in Z$; conclure.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail